УДК 004

ДИСКРЕТНЫЙ МАРКОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Фазылжанов Айбек Қадырұлы
aybekfazylzhanov@gmail.com
Магистрант образовательной программы
7M01503 – «Математика. Управление образовательным процессом»
Научный руководитель – **Мырзашева А.Н.**
к.т.н., профессор
Атырауский университет им. Х. Досмухамедова
г. Атырау, Казахстан

Введение

Марковские процессы представляют собой фундаментальный класс стохастических процессов, играющих ключевую роль в моделировании случайных явлений, развивающихся во времени. Их отличительной особенностью является марковское свойство, согласно которому будущее состояние системы зависит исключительно от ее текущего состояния и не зависит от предыстории. Эта "память только о настоящем" существенно упрощает анализ и делает марковские процессы мощным инструментом для изучения динамики сложных систем в самых разных областях науки и техники.

Среди многообразия марковских процессов особое место занимают дискретные марковские случайные процессы с непрерывным временем, известные также как непрерывные цепи Маркова (Continuous-Time Markov Chains, CTMC). Данные процессы описывают динамику систем, которые могут находиться в одном из дискретных состояний, а переходы между этими состояниями происходят в случайные моменты времени. В отличие от дискретных цепей Маркова, где состояния меняются в фиксированные моменты времени, непрерывность временного параметра делает CTMC незаменимым инструментом для моделирования широкого спектра реальных систем, где события могут происходить в любой момент времени. Это могут быть процессы в телекоммуникационных сетях, биологических системах, финансовом моделировании, теории надежности и многих других областях, где моменты наступления событий играют критическую роль.

В настоящей работе будут рассмотрены основные определения, свойства, ключевые характеристики и разнообразные приложения дискретных марковских случайных процессов с непрерывным временем. Мы подробно изучим понятие интенсивности переходов, которая определяет скорость, с которой система покидает одно состояние и переходит в другое. Будут рассмотрены уравнения Колмогорова для прямых и обратных уравнений, описывающие эволюцию вероятностей состояний во времени. Особое внимание будет уделено стационарному распределению, которое, при его существовании, описывает долгосрочное поведение системы. Также будет представлен наглядный практический пример, иллюстрирующий применение данного класса процессов для моделирования конкретной реальной ситуации, что позволит лучше понять практическую ценность и возможности непрерывных цепей Маркова.

Пояснительная часть

Основные понятия

Пространство состояний (State Space): Множество S, состоящее из конечного или счетного числа дискретных состояний, в которых может находиться система.

Марковское свойство (Markov Property): Для любого момента времени $t \geq 0$ и состояний $i, j \in S$, вероятность перехода из состояния i в состояние j в момент времени $t+s$ зависит только от состояния i в момент времени t:

$$P(X(t+s)=j \mid X(t)=i, \{X(u)=xu, 0 \leq u < t\}) = P(X(t+s)=j \mid X(t)=i)$$

где $X(t)$ обозначает состояние процесса в момент времени t.

Интенсивность перехода (Transition Rate): Для любых двух различных состояний $i, j \in S$ $(i \neq j)$, интенсивность перехода из состояния i в состояние j, обозначаемая как $q_{ij} \geq 0$, определяется как:

$$q_{ij} = lim_{h \to 0+} \frac{P(X(t+h) = j \mid X(t) = i)}{h}$$

Эта величина представляет собой среднее количество переходов из состояния i в состояние j в единицу времени, при условии, что процесс находится в состоянии i.

Матрица интенсивностей (Infinitesimal Generator Matrix): Матрица $Q = (q_{ij})$, где q_{ij} - интенсивность перехода из состояния i в состояние j. Диагональные элементы матрицы определяются как:

$$q_{ii} = -\sum j \in S, j \neq i q_{ij}$$

Величина $- q_{ii}$ представляет собой скорость выхода из состояния i.

Время пребывания в состоянии (Holding Time): Время, которое процесс проводит в состоянии i до момента перехода в другое состояние, является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром $-q_{ii}$.

Основные свойства

1. Непрерывность времени: Процесс определен для всех $t \geq 0$.

2. Дискретность состояний: Пространство состояний S является дискретным.

3. Марковское свойство: Будущее не зависит от прошлого при условии знания настоящего.

4. Экспоненциальное распределение времени пребывания: Время, проведенное в каждом состоянии, распределено экспоненциально.

5. Интенсивности переходов определяют динамику: Матрица интенсивностей Q полностью определяет вероятностную динамику процесса.

6. Уравнения Колмогорова (Kolmogorov Equations): Динамика вероятностей состояний $P_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$ описывается системой дифференциальных уравнений:

Прямые уравнения Колмогорова (Forward Kolmogorov Equations):

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) q_{kj}$$

Обратные уравнения Колмогорова (Backward Kolmogorov Equations):

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \in S} q_{ik} P_{kj}(t)$$

Применение

Непрерывные цепи Маркова находят широкое применение в самых разнообразных областях науки и техники благодаря своей способности моделировать динамику систем со случайными переходами в непрерывном времени. Рассмотрим подробнее некоторые из ключевых областей их использования:

Теория массового обслуживания (Queueing Theory): Моделирование различных систем обслуживания является одной из классических областей применения CTMC. Эти модели позволяют анализировать и оптимизировать работу очередей в магазинах, банках, call-центрах, а также систем обработки заявок в компьютерных сетях, производственных линий и транспортных узлов. Интенсивности переходов в таких моделях обычно представляют собой средние скорости прибытия клиентов (или заявок) в систему и средние скорости их обслуживания. Например, в простейшей модели M/M/1, описывающей одноканальную систему с пуассоновским потоком входящих заявок и экспоненциальным временем обслуживания, интенсивность перехода из состояния n (в очереди n клиентов) в состояние n+1 соответствует скорости прибытия, а интенсивность перехода из состояния n в состояние n−1 соответствует скорости обслуживания. Анализ таких моделей с помощью СТМС позволяет определять ключевые характеристики производительности системы, такие как средняя длина очереди, среднее время ожидания клиента в очереди и вероятность того, что система будет занята. Более сложные модели могут учитывать многоканальное обслуживание (M/M/c), ограниченную емкость очереди, различные дисциплины обслуживания и другие факторы, делая СТМС мощным инструментом для проектирования и управления системами обслуживания.

Анализ надежности (Reliability Analysis): Оценка времени безотказной работы технических систем и моделирование процессов отказов и восстановления являются критически важными задачами в инженерии и эксплуатации сложного оборудования. Непрерывные цепи Маркова предоставляют естественный способ для моделирования таких процессов. Состояния системы могут представлять собой различные уровни работоспособности (например, полностью исправное состояние, частично работоспособное состояние, состояние отказа). Интенсивности переходов между этими состояниями соответствуют частотам отказов компонентов системы и скоростям их ремонта или замены. Например, можно построить модель надежности, в которой система имеет два состояния: "работает" и "сломана". Интенсивность перехода из состояния "работает" в состояние "сломана" будет соответствовать частоте отказов, а интенсивность обратного перехода – скорости восстановления. Анализ такой модели позволяет рассчитать вероятность того, что система будет находиться в работоспособном состоянии в заданный момент времени, среднее время до первого отказа (Mean Time To Failure, MTTF) и другие важные показатели надежности. Более сложные модели могут учитывать множественные компоненты, различные режимы отказа и стратегии технического обслуживания.

Биология и медицина: Непрерывные цепи Маркова широко используются для моделирования различных динамических процессов в биологических и медицинских системах. В контексте динамики популяций, состояния могут представлять собой численность различных видов или возрастных групп, а интенсивности переходов – скорости рождаемости, смертности, миграции и взаимодействия между популяциями. Модели распространения инфекционных заболеваний часто используют СТМС для описания переходов индивидуумов между различными состояниями, такими как "восприимчив", "инфицирован", "выздоровел" (модель SIR). Интенсивности переходов в этом случае соответствуют скорости заражения и скорости выздоровления. В клеточной биологии СТМС могут применяться для моделирования процессов экспрессии генов, движения молекул и других внутриклеточных процессов, где переходы между состояниями происходят случайным образом. В медицине СТМС могут использоваться для моделирования состояний пациентов при различных заболеваниях, например, в моделях прогрессирования рака, сердечно-сосудистых заболеваний или хронических состояний. Состояния могут представлять собой различные стадии заболевания, а интенсивности переходов – вероятности перехода между этими стадиями в единицу времени. Анализ таких моделей помогает прогнозировать течение заболевания, оценивать эффективность лечения и разрабатывать оптимальные стратегии медицинского вмешательства.

Финансовая математика: Непрерывные цепи Маркова находят применение в различных областях финансового моделирования. Например, они могут использоваться для моделирования цен на активы, где цена может переходить между дискретными уровнями или режимами с определенными интенсивностями. В анализе кредитных рисков СТМС могут моделировать переходы компаний между различными кредитными рейтингами (например, от AAA до AA или до состояния дефолта). Интенсивности переходов в этом случае отражают вероятности изменения кредитного качества за определенный период времени. В опционном ценообразовании СТМС могут использоваться как альтернатива моделям с непрерывным временем, таким как модель Блэка-Шоулза, для моделирования случайных движений цен базового актива. Состояния могут представлять собой различные ценовые диапазоны, а интенсивности переходов – вероятности перехода из одного диапазона в другой. Анализ таких моделей позволяет оценивать справедливую стоимость финансовых инструментов и управлять рисками.

Телекоммуникационные сети: Анализ производительности сетей, моделирование трафика и управление ресурсами являются важными задачами в области телекоммуникаций. Непрерывные цепи Маркова предоставляют удобный математический аппарат для моделирования случайных процессов, происходящих в сетях связи. Например, СТМС могут использоваться для моделирования прибытия и обслуживания пакетов данных в сетевых узлах, установления и завершения телефонных вызовов, динамического распределения полосы пропускания и других сетевых ресурсов. Состояния системы могут представлять собой количество активных соединений, уровень загрузки буферов или состояние каналов связи. Интенсивности переходов соответствуют скоростям поступления и обработки трафика, частоте возникновения и устранения ошибок, а также другим событиям, влияющим на производительность сети. Анализ таких моделей позволяет оценивать ключевые показатели качества обслуживания (Quality of Service, QoS), такие как вероятность блокировки вызовов, время задержки передачи данных, пропускная способность сети и эффективность использования ресурсов.

Практическая часть (Пример)

Рассмотрим систему, состоящую из одного сервера, который может находиться в двух состояниях: 0 (свободен) и 1 (занят). Предположим, что заявки поступают на сервер с интенсивностью $\lambda = 0.5$ заявок в минуту, и время обслуживания заявки распределено экспоненциально со средним временем 2 минуты, что соответствует интенсивности обслуживания $\mu = 1/2 = 0.5$ заявок в минуту.

Матрица интенсивностей Q для этой системы будет иметь вид:

$$q = (-\lambda\ \lambda\ \mu\ -\mu\ ) = (-0.5\ 0.5\ 0.5\ -0.5\ )$$

Здесь:

- $q_{01} = \lambda = 0.5$ - интенсивность перехода из состояния "свободен" в состояние "занят" (поступление новой заявки).
- $q_{10} = \mu = 0.5$ - интенсивность перехода из состояния "занят" в состояние "свободен" (завершение обслуживания).
- $q_{00} = -\lambda = -0.5$ - скорость выхода из состояния "свободен".
- $q_{11} = -\mu = -0.5$ - скорость выхода из состояния "занят".

Стационарное распределение вероятностей (π_0, π_1), где π_0 - вероятность того, что сервер свободен, а π_1 - вероятность того, что сервер занят, может быть найдено из системы уравнений $\pi Q = 0$ и $\pi_0 + \pi_1 = 1$:

$$-0.5\pi_0 + 0.5\pi_1 = 0$$
$$0.5\pi_0 - 0.5\pi_1 = 0$$
$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

Решением этой системы является $\pi_0 = 0.5$ и $\pi_1 = 0.5$. Это означает, что в долгосрочной перспективе сервер будет свободен в течение 50% времени и занят в течение 50% времени.

Пример: Состояние компьютерного сервера

Рассмотрим компьютерный сервер, который может находиться в двух состояниях:

- 0: Нормальная работа
- 1: Сломан

Предположим, что интенсивность перехода сервера из состояния нормальной работы в состояние поломки равна λ (количество поломок в единицу времени), а интенсивность перехода из состояния поломки в состояние нормальной работы (после ремонта) равна μ (количество ремонтов в единицу времени).

Матрица интенсивностей переходов (инфинитезимальный генератор):

$$Q = (-\lambda\ \lambda\ \mu\ -\mu\ )$$

Прямые уравнения Колмогорова (уравнения Чепмена-Колмогорова для непрерывного времени):

Эти уравнения описывают, как изменяются во времени вероятности нахождения сервера в каждом из состояний:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) - \mu P_1(t)$$

Здесь $P_0(t)$ – вероятность того, что в момент времени t сервер находится в состоянии нормальной работы, а $P_1(t)$ – вероятность того, что в момент времени t сервер сломан.

Стационарное распределение (предельные вероятности):

Если $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ является стационарным распределением, то оно удовлетворяет уравнениям $\pi Q = 0$ и $\pi_0 + \pi_1 = 1$. В данном случае:

$$\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Эти формулы дают вероятности того, что в долгосрочной перспективе сервер будет находиться в состоянии нормальной работы (π_0) или в состоянии поломки (π_1).

Заключение

В заключение следует подчеркнуть, что дискретные марковские случайные процессы с непрерывным временем являются мощным и универсальным инструментом для моделирования динамики систем, претерпевающих случайные изменения состояний в непрерывном времени. Их фундаментальные свойства, такие как марковское свойство и возможность описания переходов с помощью интенсивностей, а также широкий спектр приложений делают их незаменимыми в различных областях науки и техники, включая телекоммуникации, биологию, финансы, теорию массового обслуживания и многие другие. Корректное применение математического аппарата непрерывных цепей Маркова, включающего анализ интенсивностей переходов, решение уравнений Колмогорова и исследование стационарных распределений, позволяет проводить глубокий анализ поведения сложных систем, прогнозировать их развитие в долгосрочной перспективе и принимать обоснованные решения в условиях неопределенности.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на изучение более сложных классов непрерывных цепей Маркова, например, с зависимыми от времени интенсивностями или с бесконечным числом состояний. Также представляет интерес разработка эффективных вычислительных методов для анализа и моделирования крупномасштабных систем, описываемых CTMC. Наконец, применение непрерывных цепей Маркова в новых, междисциплинарных областях, таких как анализ социальных сетей, моделирование распространения заболеваний или изучение климатических изменений, открывает широкие перспективы для дальнейшего развития и практического использования данного класса стохастических процессов.

Список использованной литературы

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Том 1. Москва: Наука, 1971.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Москва: Наука, 1969.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Москва: Наука, 2000.
4. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Киев: Наукова думка, 1985.

5. Крылов В.Ю., Бобровский В.В., Казаков В.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва: Юрайт, 2023.
6. Ross, S. M. (2014). Stochastic Processes. John Wiley & Sons.
7. Norris, J. R. (1998). Markov Chains. Cambridge University Press.